第 2 节 三大统一思想：角度、名称、次数（★★★）

强化训练

类型Ⅰ：三大思想的应用

1．（2021·北京卷·★★）已知函数 $f(x)=\cos x-\cos 2x$，则该函数是（　　）

（A）奇函数，最大值为 2

（B）偶函数，最大值为 2

（C）奇函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

（D）偶函数，最大值为 $\frac{9}{8}$

答案：D

解析：$f(-x)=\cos(-x)-\cos 2(-x)=\cos x-\cos 2x$

$=f(x)\Rightarrow f(x)$ 为偶函数，

为了研究 $f(x)$ 的最值，可用二倍角公式将角度统一，且为了使函数名也统一，选择 $\cos 2x=2\cos^2 x-1$，

$f(x)=\cos x-\cos 2x=\cos x-(2\cos^2 x-1)$

$=-2\cos^2 x+\cos x+1=-2(\cos x-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$，

所以当 $\cos x=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 取得最大值 $\frac{9}{8}$.

2．（2022·湖南模拟·★★）函数 $f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x$ 的最大值为_____.

答案：2

解析：先统一角度，对 $\sin 2x$ 用二倍角公式，

$f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x=\sin x\cdot 2\sin x\cos x-2\cos x$

$=2\cos x(\sin^2 x-1)$，

将 $\sin^2 x$ 换成 $1-\cos^2 x$，可统一函数名，

所以 $f(x)=2\cos x(1-\cos^2 x-1)=-2\cos^3 x$，

因为 $-1\le\cos x\le 1$，所以当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2.

3．（2022·兰州模拟·★★）已知 $\cos(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin(\theta+\frac{\pi}{10})=$______.

答案：$-\frac{1}{3}$

解析：经尝试，展开不易处理，故观察角的联系，将求值的角统一成已知的角，可将 $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{5}$ 换元成 t，

设 $\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{5}=t$，则 $\theta=2t+\frac{2\pi}{5}$，且 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $\theta+\frac{\pi}{10}=(2t+\frac{2\pi}{5})+\frac{\pi}{10}=2t+\frac{\pi}{2}$，

故 $\sin(\theta+\frac{\pi}{10})=\sin(2t+\frac{\pi}{2})=\cos 2t=2\cos^2 t-1=-\frac{1}{3}$.

4．（2022·台州期末·★★）若 $2\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{3}}{3}$　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）$-\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{3}$

答案：A

解析：观察发现将所给等式中的平方降次，可统一次数，

$2\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1\Rightarrow 2\cos^2(\alpha-\frac{\pi}{3})-1+\cos 2\alpha=0$，

所以 $\cos(2\alpha-\frac{2\pi}{3})+\cos 2\alpha=0$，

从而 $\cos 2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\sin 2\alpha\sin\frac{2\pi}{3}+\cos 2\alpha=0$，

故 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\cos 2\alpha=0$，所以 $\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5．（★★★）若 $\tan\frac{\theta}{2}=2$，则 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=$______.

答案：$\frac{1}{2}$

解法 1：目标式中有 1，联想到升次公式，统一次数. 那 1 该与 $\sin\theta$ 组合，还是 $\cos\theta$ 呢？与 $\cos\theta$ 组合计算量要小一些. 为统一角度成 $\frac{\theta}{2}$，将剩余的 $\sin\theta$ 也打开，

由题意，$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\frac{(1+\cos\theta)+\sin\theta}{(1-\cos\theta)+\sin\theta}$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2}+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{2}.$$

解法 2：本题也可直接用万能公式求得 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$，再代入所求式子，

由万能公式，$\sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{3}{5}$，

所以 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1+\frac{4}{5}-\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}-(-\frac{3}{5})}=\frac{1}{2}$.

【反思】当 1 即可与 $\sin\theta$ 组合降次，又可与 $\cos\theta$ 组合时，一般首先尝试与 $\cos\theta$ 组合.

6．（2023·东北三省三校四模·★★★）已知锐角 α，β 满足 $\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{\sin 2\beta}{1-\cos 2\beta}$，则 $\tan(\alpha-\beta)$ 的值为（　　）

（A）1　（B）$\frac{\sqrt{3}}{3}$　（C）-1　（D）$-\sqrt{3}$

答案：C

解析：观察分母有$1-\cos2\beta$，这是升次的标志，为将角度统一为β，分子也升次，

因为$\dfrac{\sin2\beta}{1-\cos2\beta}=\dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin^2\beta}=\dfrac{1}{\tan\beta}$，

所以代入条件等式可得$\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1}{\tan\beta}$ ①，

我们要求的是$\tan(\alpha-\beta)$，故将左侧上下同除以$\cos\alpha$，弦化切分析，

又$\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$，代入①可得$\dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=\dfrac{1}{\tan\beta}$，

所以$\tan\beta-\tan\alpha\tan\beta=1+\tan\alpha$，

从而$1+\tan\alpha\tan\beta=\tan\beta-\tan\alpha$，

故$\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-1$，即$\tan(\alpha-\beta)=-1$.

7．（2022•曲靖模拟•★★★）若$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且$(1+\cos2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是（　　）

（A）$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　（B）$\alpha+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　　（C）$2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

答案：C

解析：所给等式中有$1+\cos2\alpha$、$1+\sin\beta$，这两个都是使用升次公式的标志，但为了和右侧保持β的角度统一，所以$1+\sin\beta$这项不动，只对$1+\cos2\alpha$升次，升次后为了统一角度，右侧的$\sin2\alpha$也相应升次，

因为$(1+\cos2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin2\alpha\cos\beta$，

所以$2\cos^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$，

因为$\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以$\cos\alpha>0$，从而$\cos\alpha(1+\sin\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta$，故$\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$，

所以$\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，故$\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)$ ①，

为了分析α和β的关系，可用诱导公式化同名来看，

因为$\cos\alpha=\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)$，代入式①得$\sin(\dfrac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha-\beta)$，

因为$\alpha,\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以$\dfrac{\pi}{2}-\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$\alpha-\beta\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，

注意到函数$y=\sin x$在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$上↗，

所以$\dfrac{\pi}{2}-\alpha=\alpha-\beta$，故$2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

8．（★★★）设$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，则函数$y=\dfrac{2\sin^2x+1}{\sin2x}$的最小值为_____.

答案：$\sqrt{3}$

解法1：欲求最小值，先对解析式变形，升次还是降次？若降次，会发现分子有多余的常数，不易处理，故将1换成$\sin^2x+\cos^2x$升次，分母也升次，从而统一次数，

由题意，$y=\dfrac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}=\dfrac{2\sin^2 x+\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}$

$=\dfrac{3\sin^2 x+\cos^2 x}{2\sin x\cos x}=\dfrac{3\sin x}{2\cos x}+\dfrac{\cos x}{2\sin x}$，

这两项均为正数且积为定值，可用 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 求最小值，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\sin x>0$，$\cos x>0$，

故 $y=\dfrac{3\sin x}{2\cos x}+\dfrac{\cos x}{2\sin x}\ge 2\sqrt{\dfrac{3\sin x}{2\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{2\sin x}}=\sqrt{3}$，

当且仅当 $\dfrac{3\sin x}{2\cos x}=\dfrac{\cos x}{2\sin x}$，即 $\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，

此时 $x=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $y_{\min}=\sqrt{3}$.

解法 2：第二个考虑的方向是对 $\sin^2 x$ 降次，也能统一角度，但接下来的处理技巧性较强，

由题意，$y=\dfrac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}=\dfrac{1-\cos 2x+1}{\sin 2x}=\dfrac{2-\cos 2x}{\sin 2x}$，

将这个式子稍作变形，可化为两点连线的斜率处理，

$y=\dfrac{2-\cos 2x}{\sin 2x}=-\dfrac{\cos 2x-2}{\sin 2x-0}$，记 $P(\sin 2x,\cos 2x)$，$Q(0,2)$，

则 $\dfrac{\cos 2x-2}{\sin 2x-0}$ 表示直线 PQ 的斜率，

要求 y 的最小值，只需求该斜率的最大值，先分析点 P 的运动轨迹，

因为 $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$，所以点 P 在单位圆上运动，

点 P 的轨迹是整个圆吗？可以看看 P 的坐标，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $2x\in(0,\pi)$，从而 $\sin 2x>0$，

故点 P 只能在单位圆的右半圆上运动，如图，

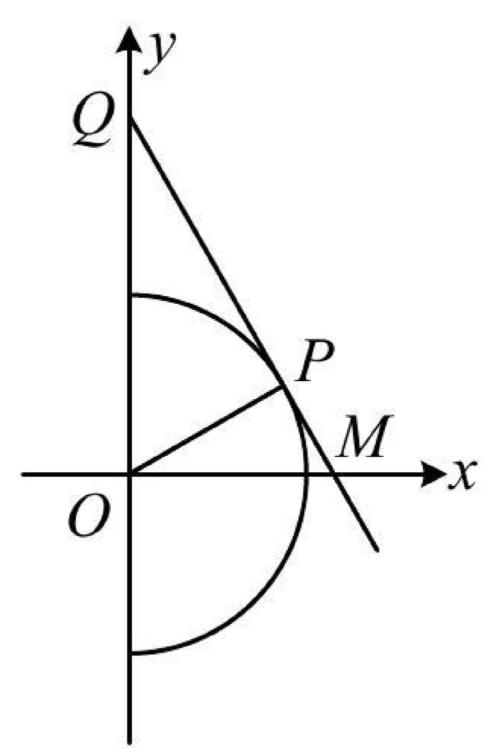
由图可知当直线 PQ 恰与半圆相切时，直线 PQ 的斜率最大，此时 y 最小，

设切线 PQ 与 x 轴交于点 M，

因为 $|OP|=1$，$|OQ|=2$，$OP\perp PQ$，所以 $\angle OQP=30^\circ$，

从而 $\angle OMQ=60^\circ$，故切线 PQ 的倾斜角为 120°，

所以其斜率为 $-\sqrt{3}$，故 $y_{\min}=\sqrt{3}$.



类型Ⅱ：给值求值问题中角度范围的限定

9.（2022·福州模拟·★★）已知 $\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4})$，则 $\sin\alpha=$______.

答案：$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：给值求值问题，先将求值的角统一成已知的角，为了便于观察，可将$\alpha-\frac{\pi}{4}$换元，

令$t=\alpha-\frac{\pi}{4}$，则$\alpha=t+\frac{\pi}{4}$，且$\sin t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

$\sin\alpha=\sin(t+\frac{\pi}{4})=\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)$ ①，

要求$\sin\alpha$，需根据$\sin t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$求$\cos t$，先研究$t$的范围，决定开平方取正还是取负，

因为$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，所以$t\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，从而$\cos t>0$，

故$\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

代入式①得：$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5})=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

10．（2022 • 北京模拟 • ★★）已知α，β均为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则$\cos\beta=$______.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：给值求值问题，可将求值的角统一成已知的角，为了便于观察，先将$\alpha+\beta$换元，

设$\gamma=\alpha+\beta$，则$\beta=\gamma-\alpha$，且$\cos\gamma=-\frac{11}{14}$，

所以$\cos\beta=\cos(\gamma-\alpha)=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha$

$=\frac{1}{7}\times(-\frac{11}{14})+\sin\gamma\sin\alpha=-\frac{11}{98}+\sin\gamma\sin\alpha$ ①，

所以要求$\cos\beta$，需先求$\sin\gamma$和$\sin\alpha$，得分析γ的象限，决定开平方取正还是取负，

因为α，β均为锐角，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

且$\gamma=\alpha+\beta\in(0,\pi)$，故$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

代入式①可得$\cos\beta=-\frac{11}{98}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

11.（2022 •延边一模 •★★★）若$\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin(\beta-\alpha)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，$\beta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$，则$\alpha+\beta=$（　　）

（A）$\frac{7\pi}{4}$　（B）$\frac{9\pi}{4}$　（C）$\frac{5\pi}{4}$或$\frac{7\pi}{4}$　（D）$\frac{5\pi}{4}$或$\frac{9\pi}{4}$

答案：A

解析：给值求角问题，可先计算所求角的某三角函数值，要确定算哪个三角函数值，应先研究角的范围，

因为$\alpha\in[\frac{\pi}{4},\pi]$，所以$2\alpha\in[\frac{\pi}{2},2\pi]$，结合$\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$可得$2\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，

又$\beta\in[\pi,\frac{3\pi}{2}]$，所以$\alpha+\beta\in(\frac{5\pi}{4},2\pi)$，

因为 $y=\cos x$ 在 $(\frac{5\pi}{4},2\pi)$ 上↗，所以算 $\cos(\alpha+\beta)$，接下来就是给值求值问题，先把求值的角 $\alpha+\beta$ 统一成已知的角 2α 和 $\beta-\alpha$，可将它们换元，以便找到 $\alpha+\beta$ 与它们的关系，

令 $\begin{cases}2\alpha=u\\\beta-\alpha=v\end{cases}$，则 $\alpha=\frac{u}{2}$， $\beta=\frac{u}{2}+v$，

故 $\alpha+\beta=\frac{u}{2}+(\frac{u}{2}+v)=u+v$，且 $\sin u=\frac{\sqrt{5}}{5}$， $\sin v=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos(u+v)=\cos u\cos v-\sin u\sin v$

$=\cos u\cos v-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\cos u\cos v-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ①，

接下来计算 $\cos u$ 和 $\cos v$，得先研究 u 和 v 的范围，才能确定开平方该取正还是取负，

由前面的计算过程知 $u=2\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos u<0$，

故 $\cos u=-\sqrt{1-\sin^2 u}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$， $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<-\alpha<-\frac{\pi}{4}$，

又 $\pi\le\beta\le\frac{3\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{2}<v=\beta-\alpha<\frac{5\pi}{4}$，从而 $\cos v<0$，

故 $\cos v=-\sqrt{1-\sin^2 v}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

代入式①可得 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}\times(-\frac{3\sqrt{10}}{10})-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

结合 $\alpha+\beta\in(\frac{5\pi}{4},2\pi)$ 可得 $\alpha+\beta=\frac{7\pi}{4}$.

12.（2022•郯城月考•★★★★）已知 α， β 为锐角，$\sin(\alpha+2\beta)=\frac{1}{5}$， $\cos\beta=\frac{1}{3}$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$（　　）

（A）$\frac{1+8\sqrt{3}}{15}$　（B）$\frac{1\pm8\sqrt{3}}{15}$　（C）$\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{15}$　（D）$\frac{1-8\sqrt{3}}{15}$

答案：A

解析：给值求值问题，先将求值的角统一成已知的角，可将 $\alpha+2\beta$ 换元成 γ，

令 $\gamma=\alpha+2\beta$，则 $\alpha=\gamma-2\beta$，所以 $\alpha+\beta=\gamma-\beta$，

且 $\sin\gamma=\frac{1}{5}$， $\cos\beta=\frac{1}{3}$，

而 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma-\beta)=\sin\gamma\cos\beta-\cos\gamma\sin\beta$

$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}-\cos\gamma\sin\beta=\frac{1}{15}-\cos\gamma\sin\beta$ ①，

还需求出 $\cos\gamma$ 和 $\sin\beta$，可先研究角的范围，决定开平方取正还是取负，

因为 α， β 为锐角，所以 $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

且 $\gamma=\alpha+2\beta\in(0,\frac{3\pi}{2})$，又 $\sin\gamma=\frac{1}{5}>0$，所以 $\gamma\in(0,\pi)$ ②，

此范围仍无法确定 $\cos\gamma$ 的正负，需更精确地分析 γ 的范围，γ 的范围由 α 和 β 决定，可结合 $\cos\beta=\frac{1}{3}$ 给出 β 更准确的范围，从而将 γ 范围精确化，

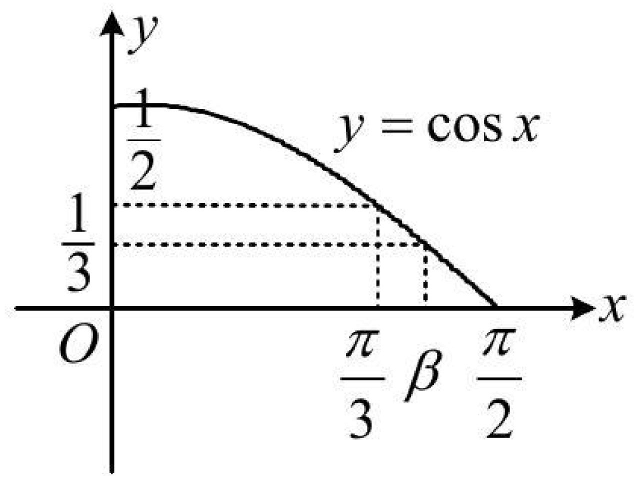
因为 $\cos\beta=\frac{1}{3}<\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$，且函数 $y=\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上↘，

如图，所以 $\frac{\pi}{3}<\beta<\frac{\pi}{2}$，故 $\frac{2\pi}{3}<2\beta<\pi$，

又 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{2\pi}{3}<\gamma=\alpha+2\beta<\frac{3\pi}{2}$，结合②可得

$\gamma\in(\frac{2\pi}{3},\pi)$，所以 $\cos\gamma<0$，故 $\cos\gamma=-\sqrt{1-\sin^2\gamma}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

代入式①得：$\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{15}-(-\frac{2\sqrt{6}}{5})\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1+8\sqrt{3}}{15}$.



【反思】类型 II 的四道题对角的范围的限定越来越严格，当粗略分析得出某角 γ 所在的象限不足以判断 $\sin\gamma$ 或 $\cos\gamma$ 的正负时，应结合有关的三角函数值进一步将范围估计得更准确.

类型III：具体角三角函数式化简求值

13.（2022・北京模拟・★★）$\frac{\sin 7^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=$______.

答案：$2-\sqrt{3}$

解析：注意到 $7^\circ=15^\circ-8^\circ$，故可将角度统一为 15° 和 8°，

原式 $=\frac{\sin(15^\circ-8^\circ)+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}$

$=\frac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ-\cos 15^\circ\sin 8^\circ+\cos 15^\circ\sin 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ+\sin 15^\circ\sin 8^\circ-\sin 15^\circ\sin 8^\circ}=\frac{\sin 15^\circ\cos 8^\circ}{\cos 15^\circ\cos 8^\circ}$

$=\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

14.（2022・太原一模・★★）$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=$（　　）

（A）$\sin 50^\circ$　　（B）$\sin 60^\circ$　　（C）$\sin 70^\circ$　　（D）$\sin 80^\circ$

答案：D

解析：本题涉及 40° 和 20° 这两个角，应将其统一，有两个方向，$40^\circ=2\times 20^\circ$ 和 $40^\circ+20^\circ=60^\circ$，若用二倍角公式把 $\sin 40^\circ$ 化掉，接下来就不好推进了，故选 $40^\circ+20^\circ=60^\circ$，可将角统一成 20° 或 40°，

$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=\sin 20^\circ+\sin(60^\circ-20^\circ)$

$=\sin 20^\circ+\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\cos 60^\circ\sin 20^\circ$

$=\sin 20^\circ+\sin 60^\circ\cos 20^\circ-\frac{1}{2}\sin 20^\circ=\sin 60^\circ\cos 20^\circ+\frac{1}{2}\sin 20^\circ$

$=\sin 60^\circ\cos 20^\circ+\cos 60^\circ\sin 20^\circ=\sin(60^\circ+20^\circ)=\sin 80^\circ$.

15.（★★★）已知 $\sqrt{3}\tan 20^\circ+\lambda\cos 70^\circ=3$，则 λ 的值为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$3\sqrt{3}$　　（D）$4\sqrt{3}$

答案：D

解析：要求 λ，先由所给的式子把 λ 反解出来，

因为 $\sqrt{3}\tan 20^{\circ}+\lambda\cos 70^{\circ}=3$，所以 $\lambda=\dfrac{3-\sqrt{3}\tan 20^{\circ}}{\cos 70^{\circ}}$，

观察形式，接下来可以切化弦统一函数名，也可以 70° 换 20°，统一角度，不妨先尝试切化弦，

故 $\lambda=\dfrac{3-\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 20^{\circ}}{\cos 20^{\circ}}}{\cos 70^{\circ}}=\dfrac{3\cos 20^{\circ}-\sqrt{3}\sin 20^{\circ}}{\cos 70^{\circ}\cos 20^{\circ}}$，

分子的两项显然可以合并，只需提 $2\sqrt{3}$ 到外面，

$$\lambda=\frac{2\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^{\circ}-\frac{1}{2}\sin 20^{\circ})}{\cos 70^{\circ}\cos 20^{\circ}}=\frac{2\sqrt{3}(\sin 60^{\circ}\cos 20^{\circ}-\cos 60^{\circ}\sin 20^{\circ})}{\cos 70^{\circ}\cos 20^{\circ}}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin(60^{\circ}-20^{\circ})}{\cos 70^{\circ}\cos 20^{\circ}}=\frac{2\sqrt{3}\sin 40^{\circ}}{\cos 70^{\circ}\cos 20^{\circ}},$$

上式中有 3 个角，可将 70° 换成 $90^{\circ}-20^{\circ}$，分母恰好可用正弦倍角公式将角度统一成 40°，

所以 $\lambda=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 40^{\circ}}{\cos(90^{\circ}-20^{\circ})\cos 20^{\circ}}=\dfrac{2\sqrt{3}\sin 40^{\circ}}{\sin 20^{\circ}\cos 20^{\circ}}$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sin 40^{\circ}}{\frac{1}{2}\sin 40^{\circ}}=4\sqrt{3}.$$

16．（2022•高唐模拟•★★★★）$\dfrac{1+\cos 20^{\circ}}{2\sin 20^{\circ}}-\sin 10^{\circ}(\dfrac{1}{\tan 5^{\circ}}-\tan 5^{\circ})=$______.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解析：$1+\cos 20^{\circ}$ 这部分可用升次公式处理，为了统一角度和次数，分母的 $\sin 20^{\circ}$ 也化为 $2\sin 10^{\circ}\cos 10^{\circ}$，原式的后半部分可切化弦，通分处理，

原式 $=\dfrac{2\cos^2 10^{\circ}}{4\sin 10^{\circ}\cos 10^{\circ}}-\sin 10^{\circ}(\dfrac{\cos 5^{\circ}}{\sin 5^{\circ}}-\dfrac{\sin 5^{\circ}}{\cos 5^{\circ}})$

$$=\frac{\cos 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}-\sin 10^{\circ}\cdot\frac{\cos^2 5^{\circ}-\sin^2 5^{\circ}}{\sin 5^{\circ}\cos 5^{\circ}}$$

$$=\frac{\cos 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}-\sin 10^{\circ}\cdot\frac{\cos 10^{\circ}}{\frac{1}{2}\sin 10^{\circ}}=\frac{\cos 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}-2\cos 10^{\circ}$$

$$=\frac{\cos 10^{\circ}-4\sin 10^{\circ}\cos 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}=\frac{\cos 10^{\circ}-2\sin 20^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}},$$

化到此处，式子中有 10° 和 20° 这两个角，可利用 $20^{\circ}=30^{\circ}-10^{\circ}$ 将角度统一为 10°，

$$\frac{\cos 10^{\circ}-2\sin 20^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}=\frac{\cos 10^{\circ}-2\sin(30^{\circ}-10^{\circ})}{2\sin 10^{\circ}}$$

$$=\frac{\cos 10^{\circ}-2(\sin 30^{\circ}\cos 10^{\circ}-\cos 30^{\circ}\sin 10^{\circ})}{2\sin 10^{\circ}}$$

$$=\frac{\cos 10^{\circ}-2(\frac{1}{2}\cos 10^{\circ}-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^{\circ})}{2\sin 10^{\circ}}=\frac{\sqrt{3}\sin 10^{\circ}}{2\sin 10^{\circ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$